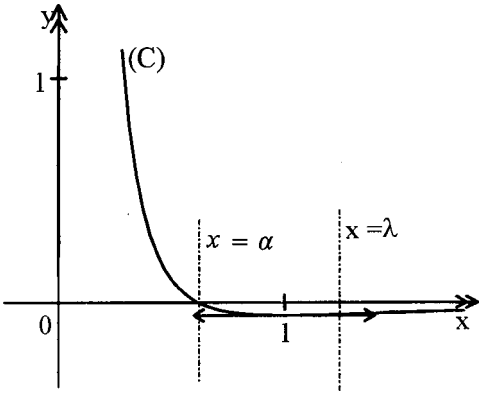
avec $X=\frac{1}{x} \to +\infty$ quand $x \to 0^+$

$$= \lim_{X\to+\infty} \left[X^2\left(\frac{\text{Log}(1+X)}{X^2} - \frac{1}{X} + \frac{1}{4} \right) \right] = +\infty.$$

Car $$\lim_{X\to+\infty} \frac{\text{Log}(1+X)}{X^2} = \lim_{X\to+\infty} \frac{\text{Log}X + \text{Log}\left(\frac{1}{X}+1\right)}{X^2}$$

$$= \lim_{X\to+\infty} \left[\frac{\text{Log}X}{X} \times \frac{1}{X} + \frac{\text{Log}\left(\frac{1}{X}+1\right)}{X^2} \right] = 0$$

$\Rightarrow$ La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à (C).



2/a- f est continue et strictement décroissante sur $]0;1[$

$\Rightarrow$ f réalise une bijection de $]0;1[$ dans $f(]0;1[) =]\ln 2 - \frac{3}{4}; +\infty[\ni 0$

$\Rightarrow$ l'équation $f(x) = 0$ possède une seule solution α dans $]0;1[$.

- $\alpha \le x \le 1 \Rightarrow f(x) \le f(\alpha) = 0$ car f est $\searrow$ sur $]\alpha, 1[$
- $\forall x \in [1;+\infty[; f(x) \le 0$ car 0 est le maximum de f sur $[1;+\infty[$.

En conclusion : $f(x) \le 0; \forall x \ge \alpha$.

3/a- $A(\lambda) = \left[\int_\alpha^\lambda -f(x)dx \right]$ u.a. avec u.a.: unité d'aire

$$\boxdot \int_\alpha^\lambda -f(x)dx = \int_\lambda^\alpha \left[\text{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} + \frac{1}{4x^2} \right] dx$$

$$= \int_\lambda^\alpha \text{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right) dx + \int_\lambda^\alpha \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{4x^2} \right] dx$$

$$\left(\begin{array}{lll} u'(x) = 1 & \rightarrowtail & u(x) = x \\ v(x) = \text{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right) & \rightarrowtail & v'(x) = \frac{-1}{x^2+x} \end{array} \right)$$

$$= \left[x\text{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right) \right]_\lambda^\alpha - \int_\lambda^\alpha \frac{-1}{x+1} dx + \left[-\text{Log}x - \frac{1}{4x} \right]_\lambda^\alpha$$